

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ
С НАЧАЛЬНЫМИ И КОНЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Э.А.ГАСЫМОВ

Бакинский Государственный Университет
gasymov-elmagha@rambler.ru

В настоящей работе в области $\Omega = \{(x, t) : 0 \leq x \leq h, 0 \leq t \leq T\}$ рассматривается смешанная задача с разделяющимися переменными для некоторого уравнения, включающая в себе производные по t второго порядка и производные по x n -го порядка, где n - некоторое натуральное число. По переменной t при $t = 0$ и при $t = T$ дается начальное и конечное условие, соответственно. А по переменным x дается довольно общее интегро-дифференциальное «граничное» условие. Рассматриваемое уравнение, в частности, включает в себя некоторые уравнения эллиптического и гиперболического типов. Для решения исследуемой задачи применяется комбинированный метод конечного интегрального преобразования [2] и вычетный метод [1].

Ключевые слова: начальные и конечные условия, метод интегральных преобразований, аналитическое представление решений.

Постановка задачи j : Найти решение уравнения

$$L(x)u_j + \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = f(x, t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

$$L(x) \equiv \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k},$$

удовлетворяющие интегро-дифференциальные условия

$$U_s(u_j) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \left[\alpha_{sk} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u_j(x, t) \Big|_{x=0} + \beta_{sk} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u_j(x, t) \Big|_{x=h} + \int_0^h \gamma_{sk}(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} u_j(x, t) dx \right] = \varphi_s(t), \quad 0 < t < T, \quad s = 1, \dots, n, \quad (2)$$

и следующее начальное и конечное условие (3. j) ($j = 1, 2, 3$):

$$u_1(x, 0) = \psi_{11}(x), \quad u_1(x, T) = \psi_{12}(x), \quad 0 < x < h, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_{21}(x), \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_{22}(x), \quad 0 < x < h, \quad (3.2)$$

$$u_3(x, 0) = \psi_{31}(x), \quad \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_{32}(x), \quad 0 < x < h, \quad (3.3)$$

где $u_j \equiv u_j(x, t)$ - искомое классическое решение; α_{sk}, β_{sk} - некоторые числа; h и T - положительные числа; n - натуральное число; а остальные - известные функции.

1⁰. Предположим, что функции $f(x, t), \gamma_{sk}(x), \varphi_s(t), a_j(x), (s = \overline{1, n}, k = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, n})$ непрерывны при $0 \leq x \leq h, 0 \leq t \leq T$; и $a_n(x) \neq 0$ при $x \in [0, h]$.

2⁰. j . Пусть $\psi_{ji}(x) \in C([0, h]), i = 1, 2$, где $j = 1, 2, 3$.

Для решения задачи j сначала рассмотрим параметрическую задачу

$$(L(x) + \lambda^2)y = \psi(x), \quad x \in (0, h), \quad (4)$$

$$U_s(y) = \gamma_s, \quad s = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где $\psi(x) \in C([0, h]), \gamma_s$ - некоторые числа.

Обозначим через $y_1(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$ системы фундаментальных частных решений однородного уравнения, соответствующая (4).

Положим

$$\Delta(\lambda) = \det \begin{pmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Пусть

$$\lambda_k^{(j)} = \frac{k\pi}{T} \sqrt{-1}, \quad k = \sigma(j), 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2: \sigma(1) = 1; \sigma(2) = 0;$$

$$\lambda_k^{(3)} = \frac{(2k+1)\pi}{2T} \sqrt{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3⁰. j . Пусть $\Delta(\lambda_k^{(j)}) \neq 0$, при $k = \sigma(j), 1, 2, \dots; (\sigma(3) = 0)$, где $j = 1, 2, 3$.

Имеет место

Теорема 1. j . Если смешанная задача j при ограничениях 1⁰, 2⁰. j и 3⁰. j имеет решение $u_j \equiv u_j(x, t)$, то оно единственное и это решение представляется формулой

$$u_j(x, t) = \frac{\pi}{2T} \sum_{k=\sigma(j)}^{\infty} \mu_{jk} \varepsilon_{\lambda_k^{(j)}}(Q_j(x, t, \lambda)), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \quad (j = 1, 2, 3), \quad (7)$$

$\mu_{20} = \frac{1}{2}$, а для остальных индексов $jk \quad \mu_{jk} \equiv 1$, где

$$Q_j(x, t, \lambda) = \frac{\lambda}{\Delta_j(\lambda)} [C_{j1}^{(2)}(t, \lambda) Q_{j2}(x, t, \lambda) - C_{j2}^{(2)}(t, \lambda) Q_{j1}(x, t, \lambda)];$$

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_2(\lambda) = \lambda sh(\lambda T); \quad \Delta_3(\lambda) = \lambda ch(\lambda T);$$

$$C_{11}^{(2)}(t, \lambda) = C_{31}^{(2)}(t, \lambda) = -sh(\lambda t); \quad C_{12}^{(2)}(t, \lambda) = sh(\lambda(T-t));$$

$$\begin{aligned}
C_{22}^{(2)}(t, \lambda) &= C_{32}^{(2)}(t, \lambda) = ch(\lambda(T-t)); \quad C_{21}^{(2)}(t, \lambda) = -ch(\lambda t); \\
Q_{ji}(x, t, \lambda) &= -\delta(x, \lambda, \Phi_{ji}^{(1)}(t, \lambda), \dots, \Phi_{ji}^{(n)}(t, \lambda)) - \int_0^h G(x, \xi, \lambda) F_{ji}(\xi, t, \lambda) d\xi; \\
\Phi_{ji}^{(s)}(t, \lambda) &= \int_{\alpha(i)}^t K_{ji}(\tau, \lambda) \varphi_s(\tau) d\tau, \quad (\alpha(1) = 0; \alpha(2) = T); \\
F_{ji}(x, t, \lambda) &= \int_{\alpha(i)}^t K_{ji}(\tau, \lambda) f(x, \tau) d\tau + \rho_{ji}, \\
\rho_{1i} &= -\lambda \psi_{1i}(x), \quad \rho_{2i} = (-1)^{i-1} \psi_{2i}(x), \quad \rho_{31} = -\lambda \psi_{31}(x), \quad \rho_{32} = -\psi_{32}(x); \\
K_{11}(\tau, \lambda) &= K_{31}(\tau, \lambda) = sh(\lambda \tau); \quad K_{12}(\tau, \lambda) = -sh(\lambda(T-\tau)); \\
K_{22}(\tau, \lambda) &= K_{32}(\tau, \lambda) = -ch(\lambda(T-\tau)); \quad K_{21}(\tau, \lambda) = ch(\lambda \tau) \quad (8)
\end{aligned}$$

$\delta(x, \lambda, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ - решение однородного уравнения, соответствующее (4), удовлетворяющее неоднородным условиям (5); $G(x, \xi, \lambda)$ - функция Грина задачи (4)-(5); $\mathcal{E}_a(f(\lambda))$ - интегральный вычет $f(\lambda)$ в точке $\lambda = a$.

Доказательство. Пусть задача j имеет классическое решение $u_j \equiv u_j(x, t)$. Тогда, применяя конечное интегральное преобразование

$$\int_{\alpha(i)}^t K_{ji}(\tau, \lambda) \varphi(\tau) d\tau, \quad (9)$$

к смешанной задаче j , имеем

$$\begin{aligned}
(L(x) + \lambda^2) \int_{\alpha(i)}^t K_{ji}(\tau, \lambda) u_j(x, \tau) d\tau &= F_{ji}(x, t, \lambda) + C_{ji}^{(1)}(t, \lambda) u_j(x, t) + \\
&+ C_{ji}^{(2)}(t, \lambda) \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t}; \quad (10)
\end{aligned}$$

$$U_s \left(\int_{\alpha(i)}^t K_{ji}(\tau, \lambda) u_j(x, \tau) d\tau \right) = \Phi_{ji}^{(s)}(t, \lambda), \quad s = 1, \dots, n, \quad (j = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
C_{11}^{(1)}(t, \lambda) &= C_{31}^{(1)}(t, \lambda) = \lambda ch(\lambda t); \quad C_{12}^{(1)}(t, \lambda) = \lambda ch(\lambda(T-t)); \\
C_{22}^{(1)}(t, \lambda) &= C_{32}^{(1)}(t, \lambda) = \lambda sh(\lambda(T-t)); \quad C_{21}^{(1)}(t, \lambda) = \lambda sh(\lambda t).
\end{aligned}$$

При $\Delta(\lambda) \neq 0$ в силу единственности решение задачи (4)-(5), согласно [2] из (10), (11) имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha(i)}^t K_{ji}(\tau, \lambda) u_j(x, \tau) d\tau &= \delta(x, \lambda, \Phi_{ji}^{(1)}(t, \lambda), \dots, \Phi_{ji}^{(n)}(t, \lambda)) + \int_0^h G(x, \xi, \lambda) \left[F_{ji}(\xi, t, \lambda) + \right. \\
&\left. + C_{ji}^{(1)}(t, \lambda) u_j(\xi, t) d\xi + C_{ji}^{(2)}(t, \lambda) \frac{\partial u_j(\xi, t)}{\partial t} \right] d\xi, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\lambda \int_0^h G(x, \xi, \lambda) u_j(\xi, t) d\xi = \frac{\lambda}{\Delta_j(\lambda)} \left[C_{j_2}^{(2)}(t, \lambda) \int_0^t K_{j_1}(\tau, \lambda) u_j(x, \tau) d\tau + \right. \\ \left. + C_{j_1}^{(2)}(t, \lambda) \int_t^T K_{j_2}(\tau, \lambda) u_j(x, \tau) d\tau \right] - Q_j(x, t, \lambda). \quad (12)$$

Положим

$$\tilde{g}_j(t, \lambda) = \frac{\lambda}{\Delta_j(\lambda)} \left[C_{j_2}^{(2)}(t, \lambda) \int_0^t K_{j_1}(\tau, \lambda) g_j(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + C_{j_1}^{(2)}(t, \lambda) \int_t^T K_{j_2}(\tau, \lambda) g_j(\tau) d\tau \right]. \quad (13)$$

Из (13) имеем

$$\tilde{g}_1(t, \lambda) = \frac{1}{sh(\lambda T)} \left[sh(\lambda(T-t)) \int_0^t sh(\lambda\tau) g_1(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + sh(\lambda t) \int_t^T sh(\lambda(T-\tau)) g_1(\tau) d\tau \right]; \\ \tilde{g}_2(t, \lambda) = \frac{1}{sh(\lambda T)} \left[ch(\lambda(T-t)) \int_0^t ch(\lambda\tau) g_2(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + ch(\lambda t) \int_t^T ch(\lambda(T-\tau)) g_2(\tau) d\tau \right]; \\ \tilde{g}_3(t, \lambda) = \frac{1}{ch(\lambda T)} \left[ch(\lambda(T-t)) \int_0^t sh(\lambda\tau) g_3(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + sh(\lambda t) \int_t^T ch(\lambda(T-\tau)) g_3(\tau) d\tau \right]. \quad (14)$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{E}_{\lambda_k^{(1)}} \tilde{g}_1(t, \lambda) = \frac{1}{T} \sin \frac{k\pi t}{T} \int_0^T \sin \frac{k\pi\tau}{T} g_1(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots ; \\ \mathcal{E}_{\lambda_k^{(2)}} \tilde{g}_2(t, \lambda) = \frac{1}{T} \cos \frac{k\pi t}{T} \int_0^T \cos \frac{k\pi\tau}{T} g_2(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots ; \\ \mathcal{E}_{\lambda_k^{(3)}} \tilde{g}_3(t, \lambda) = \frac{1}{T} \sin \frac{(2k+1)\pi t}{2T} \int_0^T \sin \frac{(2k+1)\pi\tau}{2T} g_3(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Принимая во внимание формулу (15), получаем, что^{*)} если функция $g_j(t)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[0, T]$ и при фиксированном t ($0 < t < T$) для достаточно малых τ выполняется неравенство

$$|g_j(t \pm \tau) - g_j(t)| \leq L\tau^\alpha,$$

где L и α - положительные постоянные ($\alpha \leq 1$), то имеет место следующая формула разложения

$$\frac{2T}{\pi} \sum_{k=\sigma(j)}^{\infty} \mu_{jk} \mathcal{E}_{\lambda_k^{(j)}} \tilde{g}_j(t, \lambda) = g_j(t), \quad 0 < t < T, \quad j = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Пользуясь ограничением $3^0.j$ в силу аналитичности (в некоторой окрестности точки $\lambda_k^{(j)}$) подинтегральной функции, имеем

$$\mathcal{E}_{\lambda_k^{(j)}}(\lambda) \int_0^h G(x, \xi, \lambda) u_j(\xi, t) d\xi = 0. \quad (17)$$

Пользуясь (16) и (17) из (12) получаем справедливость теоремы 1.j. Рассмотрим некоторые частные случаи:

I. Пусть $L(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и

$$U_1(u) \equiv u|_{x=0} = \varphi_1(t); \quad U_2(u) \equiv u|_{x=h} = \varphi_2(t), \quad 0 < t < T. \quad (18)$$

В этом случае $\Delta(\lambda)$ (из (6)) будет

$$\Delta(\lambda) = e^{h\lambda\sqrt{-1}} - e^{-h\lambda\sqrt{-1}}.$$

Следовательно, корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ будет $\lambda_k = \frac{k\pi}{h}$, $k \in Z$. Это означает, что в этом случае выполняется ограничение $3^0.j$ и для эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = f(x, t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T,$$

при ограничениях (18) справедливо утверждение теоремы 1.j.

II. Пусть $L(x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. При ограничениях (18) из (6) имеем

$$\Delta(\lambda) = e^{h\lambda} - e^{-h\lambda}$$

и следовательно, корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ будет

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{h} \sqrt{-1}, \quad k \in Z.$$

Это означает, что при $h \neq T$ для задачи нахождения решения гиперболического уравнения

^{*)} Признак Липшица (см. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, «Наука», 1970, с. 435).

$$-\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = f(x,t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \quad (19)$$

при ограничениях (18) имеет место утверждение теоремы 1.2, где $j = 1, 2$.

А также, если $\frac{h}{T} \neq \frac{2k}{(1+2m)}$, ($m, k = 1, 2, \dots$), то при $j = 3$ для задачи (19), (18), (3.3) имеет место утверждение теоремы 1.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cauchy A.L. Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique. Paris, 1827, VII, p.1-56.
2. Гасымов Э.А. Метод конечного интегрального преобразования и его приложения. Баку: ЭЛМ, 2009, 432 с.

BAŞLANĞIC VƏ SON SƏRHƏD ŞƏRTLİ BƏZİ QARIŞIQ MƏSƏLƏLƏR HAQQINDA

E.A.QASIMOV

XÜLASƏ

İşdə $\Omega = \{(x,t) : 0 \leq x \leq h, 0 \leq t \leq T\}$ oblastında zamana görə 2-ci tərtib, fəza dəyişəninə görə isə n -ci tərtib dəyişənlərinə ayrıla bilən xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qarışıq məsələyə baxılır. Zamana görə dəyişən üçün $t = 0$ olduqda başlanğıc və $t = T$ olduqda son sərhəd şərtləri verilir. Fəza dəyişəninə görə isə kifayət qədər geniş integro-diferensial “sərhəd” şərtləri verilir. Baxılan tənliklər xüsusi halda bəzi elliptik və hiperbolik tənlikləri özündə saxlayır. Sonlu inteqral çevirmə metodu ilə çıxıqlar metodunun kombinasiyasından istifadə etməklə tədqiq olunan məsələnin həllinin analitik ifadəsi alınır.

Açar sözlər: başlanğıc və son şərtlər, inteqral çevirmə metodu, həllin analitik ifadəsi.

ON SOME MIXED PROBLEMS WITH INITIAL AND TERMINAL CONDITIONS

E.A.GASYMOV

SUMMARY

In the paper, in domain $\Omega = \{(x,t) : 0 \leq x \leq h, 0 \leq t \leq T\}$ we consider a mixed problem with separable variables for some equation containing the second order derivatives with respect to t and n -th order derivatives with respect to x where n is some natural number. With respect to the variable t for $t = 0$ and for $t = T$ the initial and terminal condition is given. And with respect to x variables a rather general integro-differential “boundary” condition is given. The equation under consideration in particular, includes some equations of elliptic and hyperbolic type. Applying the combined method of finite integral transformation and the residue method, we get analytic representation of the solution of the mixed problem under consideration.

Key words: initial and terminal conditions, methods of integral transformations, analytic representation of solutions.

Поступило в редакцию: 29.03.2013 г.

Подписано к печати: 17.10.2013 г.